# LinAlg PVK HS19 17.01.20

## Zeitplan:

**Morgen:**
- QR mit Givens / Householder
- Untervektorräume
- Basis, Kern & Bild
- Gram-Schmidt
- Verallgemeinerte Norm & Skalarprodukt
- $A^k x$ (Eigenwertproblem)
- Differentialgleichungen 1. Ordn.

**Nachmittag:**
- Prüfung HS 18
  - ↳ Orthogonalisierung & QR
  - ↳ $e^C$
  - ↳ Lineare Abbildungen & Abbildungsmatrizen
  - ↳ Basiswechsel
  - ↳ Ausgleichsrechnung mit SVD
  - ↳ Beweisaufgabe (Schur-Zerlegung)
  - ↳ Multiple Choice

## QR-Zerlegung mit Givensrotation & Householderspiegelung:

Beispiel Givens:

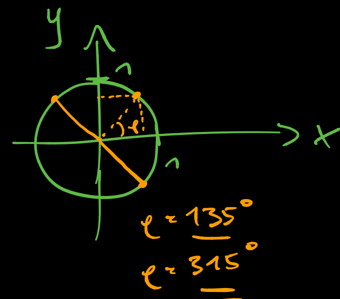
$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ \boxed{-1} & 4 \end{bmatrix} = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{R}}$$

i) $a_{21} \rightarrow 0$

ii) $$G = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \boxed{\cdot} & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \rightarrow G = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

$a_{31}$

iii) $$G \cdot A = R = \begin{bmatrix} \cos\varphi - \sin\varphi & 3\cos\varphi + 4\sin\varphi \\ \underbrace{-\sin\varphi - \cos\varphi}_{=0} & -3\sin\varphi + 4\cos\varphi \end{bmatrix}$$




iv) $\cos\varphi = -\sin\varphi$

$\cos 315° = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin 315° = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

v) $G \cdot A = R$ $\quad Q = G^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}}$

$A = QR$

$$R = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}}}$$

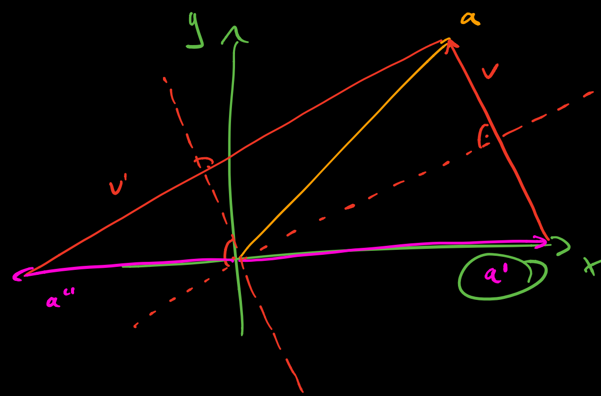
vi) i) - v) für das nächste Element

$$\Rightarrow \quad G_2 (G_1 A) = R$$

$$Q = (G_2 G_1)^T = G_1^T G_2^T$$

Beispiel Householder:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & * & * \\ 2 & * & * \\ 1 & * & * \end{bmatrix}$$




i) $a = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

ii) $a' = \|a\| e_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\|a\| = 3$

iii) $v = a \pm a' = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\boxed{H = I - \frac{2}{v^T v} v v^T = I - 2 u u^T} \quad \Big| \quad u = \frac{v}{\|v\|}$$

iv) $u = \frac{v}{\|v\|} = \underline{\frac{1}{\sqrt{30}} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}$

$\|v\| = \sqrt{30}$

v) $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{30} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} [5\ 2\ 1]$

$= \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 25 & 10 & 5 \\ 10 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\frac{1}{15} \begin{bmatrix} -10 & -10 & -5 \\ -10 & 11 & -2 \\ -5 & -2 & 14 \end{bmatrix}}$

vi) $H \cdot A = \begin{bmatrix} -3 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix} = R'$

vii) 1. i) - vi) mit $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow H_2$

2. i) - vi) mit $\begin{bmatrix} * & * \\ * & * \end{bmatrix}$ auf $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow H_2'$

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{H_2'} \end{bmatrix}$$

Bei beiden: $H_2 (H_1 A) = R$

$$Q = (H_2 H_1)^T = H_1^T H_2^T$$

## Untervektorraum & Regeln:

$U \neq \emptyset$ ist ein UVR, falls er eine Teilmenge eines VR ist, und: $\forall a, b \in U$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

(i) $a + b \in U$

(ii) $\alpha \cdot a \in U$

Beispiel: $U = \{ A \in V \mid A^T = -A \}$, $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$

Überprüfen: $\forall U_1, U_2 \in U$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

(i) $(U_1 + U_2)^T = U_1^T + U_2^T = -U_1 - U_2 = -(U_1 + U_2)$ ✓

(ii) $(\alpha U_1)^T = U_1^T \alpha^T = \alpha U_1^T = -(\alpha U_1)$ ✓

## Basis beweisen:

Beispiel: $\mathcal{P}_2$, $C = \{ c^{(1)} = 2,\ c^{(2)} = x^2+x-1,\ c^{(3)} = 2x^2-5x \}$

1) $$\left.\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{2} c^{(1)} \\ x &= \frac{2c^{(2)} - c^{(3)} + c^{(1)}}{7} \\ x^2 &= \frac{5c^{(2)} + c^{(3)} + \frac{5}{2} c^{(1)}}{7} \end{aligned}\right\}$$

C ist ES & minimal, da nur 3 Vektoren

$\Rightarrow$ Basis

2)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{G.} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{array}\right)$$

rank 3 $\Rightarrow$ lin. unabh.

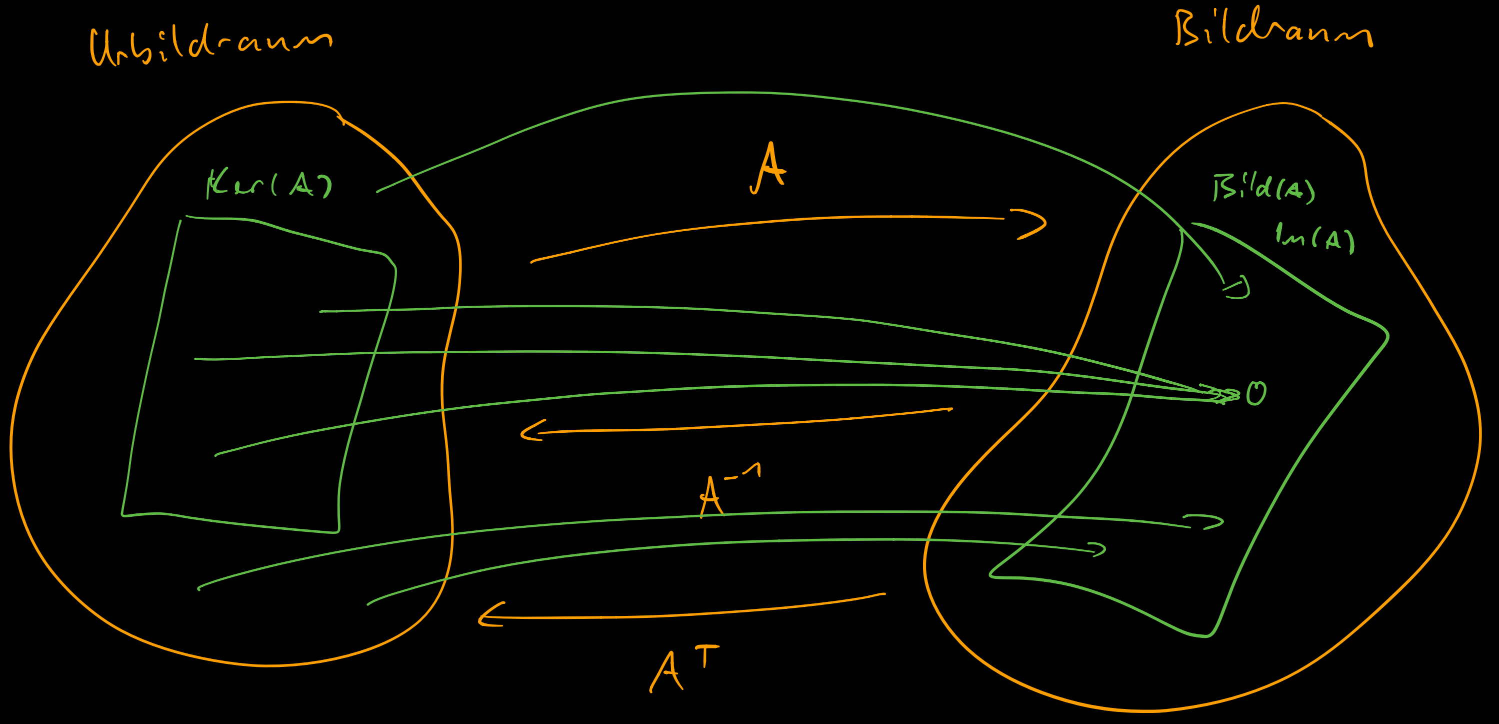
$\Rightarrow$ ES $\Rightarrow$ Basis

# Basis von Kern & Bild:

Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Ax = x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \ldots$$




Ker(A):

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \boxed{2} & 1 & 1 & 0 & \vert\ 0 \\ 0 & \boxed{2} & 3 & -3 & \vert\ 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vert\ 0 \end{array} \Rightarrow$$

$x_4 = s \in \mathbb{R}$

$x_3 = t \in \mathbb{R}$

$$x_2 = \frac{3s - 3t}{2}$$

$$x_1 = \frac{-x_2 - x_3}{2} = \frac{1}{4}t - \frac{3}{4}s$$

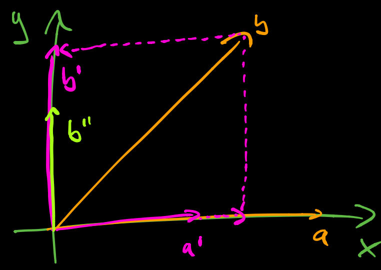
$$\Rightarrow \mathcal{L} = \mathrm{Ker}(A) = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{4}t - \frac{3}{4}s \\ \frac{3}{2}s - \frac{3}{2}t \\ t \\ s \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} s \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\operatorname{Im}(A) = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

## Gram-Schmidt Orthonormalisierungsverfahren:




(i) $e^{(1)} = \dfrac{b^{(1)}}{\|b^{(1)}\|}$

(ii) $e^{(2)'} = b^{(2)} - \langle b^{(2)}, e^{(1)} \rangle \cdot e^{(1)}$ & $e^{(2)} = \dfrac{e^{(2)'}}{\|e^{(2)'}\|}$

(iii) $e^{(3)'} = b^{(3)} - \langle b^{(3)}, e^{(1)} \rangle e^{(1)} - \langle b^{(3)}, e^{(2)} \rangle e^{(2)}$ & $e^{(3)} = \dfrac{e^{(3)'}}{\|e^{(3)'}\|}$

usw.

Beispiel: $\mathcal{P}_4$ mit $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)\, q(x)\, dx$, $\operatorname{span}\{1, 3x^4\}$

Gram-Schmidt:

i) $e^{(1)} = \dfrac{1}{\|1\|} = 1$

$$\|1\| = \sqrt{\int_0^1 1\, dx} = 1$$

ii) $e^{(2)'} = 3x^4 - \langle 3x^4, 1 \rangle \cdot 1$

$$= 3x^4 - \int_0^1 3x^4\, dx \cdot 1$$

$$= 3x^4 - \left[ \frac{3}{5} x^5 \right]_0^1 = 3x^4 - \frac{3}{5}$$

$$e^{(2)} = \frac{e^{(2)'}}{\|e^{(2)'}\|} = \frac{15}{4} x^4 - \frac{3}{4}$$

$$\|e^{(2)'}\| = \sqrt{\int_0^1 \left(3x^4 - \frac{3}{5}\right)^2 dx} = \sqrt{\int_0^1 9x^8 - \frac{18}{5} x^4 + \frac{9}{25}\, dx}$$

$$= \sqrt{\left[ x^9 - \frac{18}{25} x^5 + \frac{9}{25} x \right]_0^1} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \underline{\frac{4}{5}}$$

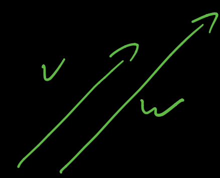
## Verallgemeinerte Norm:

$$\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto \|v\|$$

$\forall v, w \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$:

(i) $\|v\| \geq 0$ & $\|v\| = 0 \iff v = 0$ positive definitheit

(ii) $\|\alpha \cdot v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$




(iii) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ Dreiecksungleichung

## Verallgemeinertes Skalarprodukt:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \to \mathbb{R}, \quad (a,b) \mapsto \langle a, b \rangle$$

$\forall x, y, z \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$\langle \lambda x, \lambda y \rangle$

$= \lambda^2 \langle x, y \rangle$

(i) $\langle x, \lambda(y+z) \rangle = \langle x, \lambda y \rangle + \langle x, \lambda z \rangle$

$= \underline{\lambda \langle x, y \rangle + \lambda \langle x, z \rangle}$

$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$

(ii) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

(iii) $\langle x, x \rangle \geq 0$, $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$ positive definitheit

## Induzierte Norm:

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, $a \in V$

$$\Rightarrow \|a\| = \sqrt{\langle a, a \rangle}$$

Beispiel:

$$V, \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \langle x, y\rangle_A = x^T A y$ ein Skalarprodukt

$\forall x, y, z \in V, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}:$ $\qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

i) $\langle x, \lambda(y+z)\rangle = \lambda \langle x, y\rangle + \lambda \langle x, z\rangle$

$$x^T A(\lambda(y+z)) = x^T A(\lambda y + \lambda z) = \lambda x^T A y + \lambda x^T A z \ \checkmark$$

ii) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$

$$x^T A y = (x^T A y)^T = y^T A^T x = y^T A x \ \checkmark$$

iii) $\langle x, x\rangle \geq 0, \ \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$$x^T A x \geq 0, \quad x^T A x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$\Rightarrow$ A positiv definit $\Leftrightarrow$ Alle EW von $A > 0$

Hurwitz-Kriterium:

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{2} & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \det(2) = 2 > 0, \ \det\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = 6 > 0$$

$\Rightarrow$ A pos. def.

$\Rightarrow x^T A x \geq 0, \ x^T A x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\checkmark$

## $A^k$ - Eigenwertproblem & Diagonalisieren:

$$A^k x = (TDT^{-1})^k x$$

$$= TD\underbrace{T^{-1}T}_{I}D\underbrace{T^{-1}T}_{I} \ldots \underbrace{T^{-1}T}_{I}DT^{-1}x$$

$$= T D^k T^{-1} x$$

$$\begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} \cdot \ldots = \begin{bmatrix} d_1^k & 0 \\ 0 & d_2^k \end{bmatrix}$$

$$T^{-1}x = z$$

$$Tz = x$$

$$= TD\underbrace{T^{-1}x}_{z}$$

$$= TDz$$

Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A^{10} x \overset{?}{}$$

EW: $\det(A - \lambda I) \overset{!}{=} 0 = \det \begin{bmatrix} -\lambda & -2 & 2 \\ -2 & -\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$ $\qquad Ax = \lambda x$

$$= -\lambda \det \begin{bmatrix} -\lambda & -2 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} + 2 \det \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -\lambda & -2 \end{bmatrix}$$

$$= -\lambda \left[ \lambda^2 - 2\lambda - 2 \right] + 2 \left[ 2\lambda - 4 + 2 \right] + \left[ 2\lambda + 4 \right]$$

$$= -\lambda \left[ \lambda^2 - 2\lambda - 2 \right] + 6\lambda$$

$$= -\lambda \left[ \lambda^2 \underbrace{-2\lambda}_{+} \underbrace{-8}_{\cdot} \right]$$

$$(\lambda - 4)(\lambda + 2)$$

$\lambda_1 = \underline{0}$

$\lambda_2 = \underline{-2}$

$\lambda_3 = \underline{4}$

EV: $(A - \lambda I) x \overset{!}{=} 0$

$\lambda_1 = 0$: $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} x_3 = s \\ x_2 = s \\ x_1 = -s \end{matrix}$

$$\Rightarrow \underline{E_0 = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}}$$

$\lambda_2 = -2$: $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} x_3 = 0 \\ x_2 = s \\ x_1 = s \end{matrix}$

$$\Rightarrow E_{-2} = \text{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$$

$$\lambda_3 = 4: \left[\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = s \\ x_2 = -s \\ x_1 = s \end{array}$$

$$E_4 = \text{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}\right\}$$

$$\Rightarrow D = \begin{bmatrix} 0 & & \emptyset \\ & -2 & \\ \emptyset & & 4 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{10}x = TD^{10}T^{-1}x = TD^{10}z$$

$$z: \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} z_3 = 0 \\ z_2 = 2 \\ z_1 = 1 \end{array} \Rightarrow z = \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}$$

$$A^{10}x = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}^{10} \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1024 & 0 \\ 0 & 0 & \star \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2048 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2048 \\ 2048 \\ 0 \end{bmatrix}}}$$

## Differentialgleichungen 1. Ordnung:

$$y' = Ay \overset{\text{Euler}}{\Rightarrow} y(t) = e^{At} y_0$$

gekoppelt

$$y_1' = a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + a_{13} y_3$$
$$y_2' = a_{21} y_1 + a_{22} y_2 \ \ldots$$
$$y_3' = a_{31} y_1 + \ldots - -$$

$$y' = Ay = TDT^{-1} y$$

$$\underbrace{T^{-1} y'}_{z'} = D \underbrace{T^{-1} y}_{z}$$

$T^{-1} y = z$

$Tz = y$

$$z' = Dz$$

entkoppelt

$$z_1' = d_1 z_1$$
$$z_2' = d_2 z_2$$
$$z_3' = d_3 z_3$$

Euler-Ansatz $\Rightarrow$

$$z_1(t) = e^{d_1 t} c_1 = e^{\lambda_1 t} c_1$$
$$z_2(t) = e^{d_2 t} c_2$$
$$z_3(t) = e^{d_3 t} c_3$$

$$z(t) = e^{Dt} z_0 \quad \Big| \quad z_0 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

$$y(t) = T z(t) = T e^{Dt} z_0 = \begin{bmatrix} t^{(1)} & t^{(2)} & t^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & e^{\lambda_2 t} & \\ & & e^{\lambda_3 t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

$$= c_1 e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} t^{(1)} \end{bmatrix} + c_2 e^{\lambda_2 t} \begin{bmatrix} t^{(2)} \end{bmatrix} + c_3 e^{\lambda_3 t} \begin{bmatrix} t^{(3)} \end{bmatrix}$$

Beispiel:

a) $A = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 2 \\ -9 & 3 & 1 \\ -9 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $y' = Ay$

b) AWP: $\lim_{t \to \infty} y(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

a)

EW: $\det(A - \lambda I) \overset{!}{=} 0 = \det \begin{bmatrix} -6-\lambda & 0 & 2 \\ -9 & 3-\lambda & 1 \\ -9 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix}$

$= (3-\lambda) \det \begin{bmatrix} -6-\lambda & 2 \\ -9 & 3-\lambda \end{bmatrix}$

$= (3-\lambda) \left[ \underbrace{(\lambda+6)(\lambda-3)}_{=-18} + 18 \right]$

$\lambda_1 = 3$

$\lambda_2 = 0$

$\lambda_3 = -3$

$6 \cdot (-3)$

$-6 \quad 3$

$3 \quad -6 \leftarrow$

$-3 \quad 6$

EV: $(A - \lambda I)x = 0$

$\Rightarrow E_3 = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$, $E_0 = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$

$E_{-3} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}$,

$$\Rightarrow \quad y(t) = c_1 e^{3t}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + c_2 e^{0t}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + c_3 e^{-3t}\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}$$

b) $\lim_{t\to\infty} y(t) = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$, $\quad y(0)$ ?

$c_1 = \underline{0}$ , $c_2 = \underline{1}$ , $c_3 \in \underline{\mathbb{R}}$

$$y(t) = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + c_3 e^{-3t}\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}$$

$$y(0) = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}$$

Prüfung HS18:

**1. [6 Punkte]** In dieser Aufgabe betrachten wir die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

**a) [2.5 Punkte]** Berechnen Sie die Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren von $A$.

**b) [1 Punkt]** Bestimmen Sie eine orthonormierte Basis zu $A$ aus den Eigenvektoren.

**c) [2.5 Punkte]** Berechnen Sie die Matrix

$$e^A = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} A^n \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

$$e^A = T e^D T^{-1}$$

$$e^A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{T D^k T^{-1}}{k!}$$

$$= T \Big( \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{D^k}{k!} \Big) T^{-1} = T e^D T^{-1}$$

$$D^0 + D^1 + \frac{D^2}{2!} + \frac{D^3}{3!} \dots$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & \emptyset \\ & 1 & \\ \emptyset & & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 & & \emptyset \\ & d_2 & \\ \emptyset & & d_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{d_1^2}{2} & & \emptyset \\ & \frac{d_2^2}{2} & \\ \emptyset & & \frac{d_3^2}{2} \end{bmatrix} + \dots$$

$$= \begin{bmatrix} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{d_1^k}{k!} & & \emptyset \\ & \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{d_2^k}{k!} & \\ \emptyset & & \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{d_3^k}{k!} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{d_1} & & \emptyset \\ & e^{d_2} & \\ \emptyset & & e^{d_3} \end{bmatrix} = e^D$$

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

EW: $\det(A - \lambda I) \overset{!}{=} 0 = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{bmatrix}$

$= (2-\lambda) \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1-\lambda & 2 \end{bmatrix}$

$= (2-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 4\right] - \left[1-\lambda-2\right] + \left[2+\lambda-1\right]$

$= (2-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 4\right] + 2\lambda + 2$

$= (2-\lambda)(1-\lambda)^2 - 4(2-\lambda) + 2\lambda + 2$

$= (2-\lambda)(1-\lambda)^2 + 6\lambda - 6$

$= (1-\lambda)\left[\underbrace{(2-\lambda)(1-\lambda)}_{6} - 6\right]$

$3 \quad 2$

$-2 \quad -3$

$\underline{\underline{\lambda_1 = 1}}$

$\underline{\underline{\lambda_2 = -1}}$

$\underline{\underline{\lambda_3 = 4}}$

EV: $(A - \lambda I)x \overset{!}{=} 0$

$\lambda_1 = 1$: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = s \\ x_2 = s \\ x_1 = -2s \end{array}$

$\Rightarrow E_1 = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$$= \text{span}\left\{ \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\lambda_2 = -1: \quad \begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{array} \xrightarrow{G.} \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = s \\ x_2 = -s \\ x_1 = 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow E_{-1} = \text{span}\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\lambda_3 = 4: \quad \begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{array} \xrightarrow{G.} \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = s \\ x_2 = s \\ x_1 = s \end{array}$$

$$\Rightarrow E_4 = \text{span}\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

b) $\mathcal{B} = \{ E_1, E_{-1}, E_4 \}$

$$T = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

c) $e^A = T e^D T^T$

$$= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2e & e & e \\ 0 & -\sqrt{3}e^{-1} & \sqrt{3}e^{-1} \\ \sqrt{2}e^{4} & \sqrt{2}e^{4} & \sqrt{2}e^{4} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4e+2e^{4} & -2e+2e^{4} & -2e+2e^{4} \\ -2e+2e^{4} & e+3e^{-1}+2e^{4} & e-3e^{-1}+2e^{4} \\ -2e+2e^{4} & e-3e^{-1}+2e^{4} & e+3e^{-1}+2e^{4} \end{bmatrix}$$

**2. [6 Punkte]** Gegeben seien

$$A = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} -2 & -14 \\ 8 & -19 \\ 20 & -10 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

**a) [1 Punkt]** Geben Sie die Normalgleichungen für die Matrix $A$ und den Vektor $b$ an.

**b) [2 Punkte]** Berechnen Sie die Singulärwerte von $A$.

**Hinweis:** Die Singulärwerte enthalten keine Wurzeleinträge. Dies gilt auch für die Matrizen $U$ und $V$ in Teilaufgabe **c)**. Falls Sie sich bei **b)** verrechnet haben, können Sie bei **c)** mit den Werten 2 und 1 rechnen.

**c) [2 Punkte]** Berechnen Sie die Singulärwertzerlegung von $A$ an, also $A = U\Sigma V^\top$, wobei $\Sigma \in \mathbb{R}^{3\times 2}$.

**d) [1 Punkt]** Bestimmen Sie ein $x$ sodass $\|Ax - b\|_2 = \min_{v\in\mathbb{R}^2} \|Av - b\|_2$ gilt.

$$Ax = b \qquad S = \begin{bmatrix} \hat{S} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$USV^T x = b$$

$$SV^T x = U^T b = d = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{S} V^T x = d_0$$

$$x = V \hat{S}^{-1} d_0$$

a) $\underline{\underline{A^T A x = A^T b}}$

$U, V$ orthogonal

$S = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_i})$, $\lambda_i$ EW $A^TA$ o. $AA^T$

$U$: EV von $AA^T$

$V$: EV von $A^TA$ $\leftarrow$

$$u^{(i)} = \frac{A v^{(i)}}{\sigma^{(i)}} \leftarrow$$

$$v^{(i)} = \frac{A^T u^{(i)}}{\sigma^{(i)}}$$

b)

$$V:\ A^TA = \frac{1}{225}\begin{bmatrix} -2 & 8 & 20 \\ -14 & -19 & -10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & -14 \\ 8 & -19 \\ 20 & -10 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{225}\begin{bmatrix} 468 & -324 \\ -324 & 657 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{75}\begin{bmatrix} 156 & -108 \\ -108 & 219 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 52 & -36 \\ -36 & 73 \end{bmatrix}$$

$$\text{EW: } \det(A^TA - \lambda I) \overset{!}{=} 0 = \det\begin{pmatrix} 52-25\lambda & -36 \\ -36 & 73-25\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (52-25\lambda)(73-25\lambda) - 36^2 \overset{!}{=} 0$$

$\lambda = 0$: $52 \cdot 73$ ↯ $\qquad 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3$

$\lambda = 1$: $27 \cdot 48$

$\underline{\lambda_1 = 1}$

$\underline{\lambda_2 = 4}$

$3\cdot 3\cdot 3 \quad 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3$

$\lambda = 4: (-48)\ (-27)$ $\qquad \sigma_1 = \underline{\underline{2}}, \quad \sigma_2 = \underline{1}$

c) $S = \left[\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hdashline 0 & 0 \end{array}\right] \Big\}\hat{S}$ $\qquad$ Auch möglich: $S = \left[\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 \end{array}\right] \Big\}\hat{S}$

V: EV: $(A^T A - \lambda I)x \overset{!}{=} 0$

$\lambda_1 = 4$: $\left[\begin{array}{cc|c} -48 & -36 & 0 \\ -36 & -27 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{cc|c} -48 & -36 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_2 = s \\ x_1 = -\frac{3}{4}s \end{array}$

$\Rightarrow E_4 = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}\right\}$

$= \text{span}\left\{\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}\right\}$

$\lambda_2 = 1$: $\left[\begin{array}{cc|c} 27 & -36 & 0 \\ -36 & 48 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{cc|c} 27 & -36 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_2 = s \\ x_1 = \frac{4}{3}s \end{array}$

$\Rightarrow E_1 = \text{span}\left\{\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}\right\}$

$\Rightarrow V = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

$u^{(1)} = \dfrac{A v^{(1)}}{\sigma^{(1)}} = \dfrac{1}{150}\begin{bmatrix} -2 & -14 \\ 8 & -19 \\ 20 & -10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{150}\begin{bmatrix} -50 \\ -100 \\ -100 \end{bmatrix}$

$= \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$

$$u^{(2)} = \frac{A v^{(2)}}{\sigma^{(2)}} = \frac{1}{75}\begin{bmatrix} -2 & -14 \\ 8 & -19 \\ 20 & -10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{75}\begin{bmatrix} -50 \\ -25 \\ 50 \end{bmatrix} = \underline{\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}}$$

$$u^{(3)} = u^{(1)} \times u^{(2)} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -6 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix} = \underline{\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{U = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}}}$$

d)

$$Ax = b$$
$$USV^T x = b$$
$$SV^T x = U^T b = d = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \end{bmatrix} \qquad \hat{S} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{S} V^T x = d_0$$
$$x = V \hat{S}^{-1} d_0$$

$$d = U^T b = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \left.\begin{bmatrix} -5 \\ -1 \end{bmatrix}\right\} d_0 \\ \left.\begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}\right. d_1 \end{array}$$

$$\hat{S} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{\hat{S}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

Auch möglich $\hat{S}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\hat{S}^{+} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{5}{2} \\ -1 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ -13 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 7 \\ -26 \end{bmatrix}}}$$

**3. [6 Punkte]** Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & \beta & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

**a) [1.5 Punkte]** Finden Sie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so dass die Spaltenvektoren von $A$ orthogonal sind.

Im Folgenden seien $\alpha$ und $\beta$ nun wie in Teilaufgabe **a)**.

**b) [3.5 Punkte]** Geben Sie eine QR-Zerlegung von $A$ an.

**Hinweis:** Leider lässt sich hier $\sqrt{2}$ nicht vermeiden...

**c) [1 Punkt]** Berechnen Sie $|\det(A)|$.

a) $\underline{\underline{\beta = -1}}, \quad \alpha = \underline{\underline{\frac{5}{2}}}$

b)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{\sqrt{45}} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{\sqrt{45}} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{45}} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{5} & & \emptyset \\ & \frac{\sqrt{45}}{2} & \\ \emptyset & & 3 \end{bmatrix}$$

$$\sqrt{\frac{25}{4} + 4 + 1} = \sqrt{\frac{45}{4}} = \frac{\sqrt{45}}{2}$$

c) $|\det(A)| = |\det(Q \cdot R)| = |\underbrace{\det Q}_{\pm 1} \det R|$

$= |\det R| = \underline{\underline{\frac{45}{2}}}$

**4. [6 Punkte]** Sei $\mathcal{P}_3$ der reelle Vektorraum der Polynome auf $\mathbb{R}$ vom Grad strikt kleiner als 3. Im Folgenden betrachten wir die Mengen

$$\mathcal{B}_1 = \{1, x, x^2\} \subseteq \mathcal{P}_3,$$
$$\mathcal{B}_2 = \{x-1, x+1, x^2-1\} \subseteq \mathcal{P}_3$$

sowie die Abbildung $\mathcal{F}\colon \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$, die für alle $p \in \mathcal{P}_3$, $x \in \mathbb{R}$ durch

$$[\mathcal{F}(p)](x) = p(x) - \left(\int_0^1 y\, p'(y)\, \mathrm{d}y\right) \cdot x$$

gegeben ist (wobei $p'$ hier wie gewohnt die Ableitung von $p$ bezeichnet).

**a) [1 Punkt]** Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}$ eine lineare Abbildung ist.

**b) [1.5 Punkte]** Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $F$, durch die $\mathcal{F}$ beschrieben wird, wenn wir die Basis $\mathcal{B}_1$ in $\mathcal{P}_3$ verwenden.

**c) [2 Punkte]** Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}_2$ eine Basis von $\mathcal{P}_3$ ist.

**d) [1.5 Punkte]** Bestimmen Sie die Transformationsmatrix $T$ für den Basiswechsel von $\mathcal{B}_2$ nach $\mathcal{B}_1$ ($T$ überführt also Koordinaten bezüglich $\mathcal{B}_2$ in Koordinaten bezüglich $\mathcal{B}_1$).

a) $\mathcal{F}$ ist wohldefiniert, da

$\mathcal{F}(1) = \underline{1} \in \mathcal{P}_3$ , $\mathcal{F}(x) = \underline{\frac{1}{2}x} \in \mathcal{P}_3$

$$\mathcal{F}(x^2) = x^2 - \left(\int_0^1 y\,[y^2]'\,dy\right)x$$
$$= x^2 - \left(\int_0^1 2y^2\,dy\right)x$$
$$= x^2 - \left[\frac{2}{3}y^3\right]_0^1 x = \underline{x^2 - \frac{2}{3}x} \in \mathcal{P}_3$$

Zeigen Linearität von $\mathcal{F}$:

$\forall\, a, b \in \mathcal{P}_3$ , $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ :

(i) $\mathcal{F}(a+b) = \mathcal{F}(a) + \mathcal{F}(b)$

(ii) $\mathcal{F}(\alpha \cdot a) = \alpha \cdot \mathcal{F}(a)$

überprüfen (i) & (ii) :

$$\mathcal{F}(a+\alpha b) = (a(x)+\alpha b(x)) - \left(\int_0^1 y\,[a(y)+\alpha b(y)]'\,dy\right) x$$

$$= a(x) + \alpha b(x) - \int_0^1 y a'(y) + \alpha y b'(y)\,dy \cdot x$$

$$= a(x) + \alpha b(x) - \int_0^1 y a'(y)\,dy \cdot x - \int_0^1 \alpha y b'(y)\,dy \cdot x$$

$$= a(x) - \int_0^1 y a'(y)\,dy\, x + \alpha\left(b(x) - \int_0^1 y b'(y)\,dy\, x\right)$$

$$= \qquad \mathcal{F}(a) \qquad + \alpha \qquad \mathcal{F}(b) \qquad \square$$

b) $B_1 \xrightarrow{F} B_1$

$$\begin{array}{ccc} P_3 & \xrightarrow{\mathcal{F}} & P_3 \\ \downarrow k_x & & \downarrow k_x \\ B_1 & \xrightarrow{F} & B_1 \end{array}$$

$1 \xrightarrow{\mathcal{F}} 1 \qquad = 1\cdot(1) + 0\cdot(x) + 0\cdot(x^2)$

$x \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2}x \qquad = 0\cdot 1 + \frac{1}{2}x + 0\cdot x^2$

$x^2 \xrightarrow{\mathcal{F}} x^2 - \frac{2}{3}x \qquad = 0\cdot 1 - \frac{2}{3}x + 1\cdot x^2$

$$\Rightarrow F = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}}$$

$x = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \qquad F\cdot x = \mathcal{F}\left(a\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)$

$$= a\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{2}\\0\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}0\\-\frac{2}{3}\\1\end{bmatrix}$$

$= F x$

c) $\mathcal{B}_1 = \{1, x, x^2\} \subseteq \mathcal{P}_3,$
$\mathcal{B}_2 = \{x-1, x+1, x^2-1\} \subseteq \mathcal{P}_3$

$\quad b^{(1)} \quad b^{(2)} \quad b^{(3)}$

1)
$$1 = \frac{b^{(2)} - b^{(1)}}{2}$$
$$x = \frac{b^{(2)} + b^{(1)}}{2}$$
$$x^2 = b^{(3)} + \frac{b^{(2)} - b^{(1)}}{2}$$

$B_2$ ES & minimal, da nur 3 Vektoren

$\Rightarrow$ Basis.

2)
$$\begin{array}{ccc|c} b^{(1)} & b^{(2)} & b^{(3)} & \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \xrightarrow{G.} \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow$ rank $= 3$ $\to$ lin. unabh. $\Rightarrow$ ES

$\Rightarrow$ Basis

d) $B_2 \xrightarrow{T} B_1$

$$x-1 = \underline{-1}\cdot(1) + \underline{1}\cdot(x) + \underline{0}\cdot(x^2)$$

$$x+1 = 1\cdot 1 + 1\cdot x + 0\cdot x^2$$

$$x^2-1 = -1\cdot 1 + 0\cdot x + 1\cdot x^2$$

$$\Rightarrow T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{tikzcd}
P_3 \arrow[r, "F"] \arrow[d, "k_x"] & P_3 \arrow[d, "k_x"] \\
B_1 \arrow[r, "F"] & B_1 \\
B_2 \arrow[u, "T"] \arrow[r, "\tilde{F}"'] & B_2 \arrow[u, "T"']
\end{tikzcd}$$

$$\tilde{F} = T^{-1} F T$$

$B_2 \xrightarrow{\tilde{F}} B_2$

$$x-1 \xrightarrow{F} \frac{1}{2}x - 1 =$$

$$x+1 \xrightarrow{F} \frac{1}{2}x + 1 =$$

$$x^2-1 \xrightarrow{F} x^2 - \frac{2}{3}x - 1 =$$

$$(x-1) \quad (x+1) \quad (x^2-1)$$

**5. [6 Punkte]** Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch mit $\det(A) < 0$. Zeigen Sie folgenden Aussagen:

- **a) [1 Punkt]** Mindestens ein Eigenwert von $A$ ist strikt negativ.
- **b) [2 Punkte]** Es gibt ein $x \in \mathbb{R}^n$, so dass $x^\top A x < 0$.
- **c) [3 Punkte]** Die Aussagen in a) und b) gelten auch für Matrizen, die nicht symmetrisch sind.

a) $\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n < 0$, $\lambda_i \in$ EW von $A$

$\lambda_i \in \mathbb{R}$, da $A$ symm.

$\Rightarrow \lambda_i < 0$

b) $x$ EV zu $\lambda_i < 0$

$\Rightarrow x^T A x = x^T \lambda x = \lambda x^T x = \underbrace{\lambda}_{<0} \underbrace{\|x\|^2}_{>0} < 0$ $\square$

c) $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda_i$ & $\overline{\lambda_i}$

$\Rightarrow \lambda_i \cdot \overline{\lambda_i} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2 > 0$

a) $\Rightarrow \det(A) = \underbrace{\lambda_1 \overline{\lambda_1}}_{>0} \cdot \underbrace{\lambda_2 \overline{\lambda_2}}_{>0} \cdot \ldots \cdot \lambda_i \cdot \ldots \cdot \underbrace{\lambda_n \overline{\lambda_n}}_{>0} < 0$

$\Rightarrow \lambda_i < 0$ o

b) folgt aus a) wie oben

2. Weg:

Schur-Zerlegung: $A = SRS^T$

$S$: orth.
$R$: obere rechte Dreiecksmatrix

$\det A = \det R$

A ähnlich zu R

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "A"] \arrow[d, "S^T"] & B \\ B' \arrow[r, "R"] & B' \arrow[u, "S"'] \end{tikzcd}$$

**6. [6 Punkte]** Multiple-Choice: Auf dem Extrablatt "Richtig" oder "Falsch" ankreuzen.

**a) [1 Punkt]** Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A$ eine reelle $n \times n$ Matrix, die in Matlab eingegeben wurde. Folgende Befehle werden darauf eingegeben:

```
>> [Q, ~] = qr(A);
>> max(diag( abs(Q.'*Q - eye(size(Q))) )) < 1e-1
```

Kreuzen Sie 'Richtig' an, wenn wir erwarten können, dass Matlab den logischen Wert 1 zurückgibt. Kreuzen Sie 'Falsch' an, wenn wir erwarten können, dass Matlab den logischen Wert 0 zurückgibt.

$\max(\mathrm{diag}(|\underbrace{Q^T Q}_{} - I|)) < 0.1$ richtig

**b) [1 Punkt]** Sei $A$ eine reelle $3 \times 3$ Matrix, welche schiefsymmetrisch ist, das heisst $A^\top = -A$. Dann ist gilt $\det(A) = 0$.

richtig

**c) [1 Punkt]** Wir definieren die Matrix

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Es gilt dann, dass $P^{100} = P^{21}$.

falsch

**d) [1 Punkt]** Sei $A$ eine reelle $2 \times 2$ Matrix und habe die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. Die characteristische Gleichung zu $A$ lautet $x^2 - (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot x + \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$.

$(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)$ richtig

**e) [1 Punkt]** Die $LR$-Zerlegung einer Matrix $A$ liefert

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{7} & \frac{6}{7} & 1 \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Die Determinante von $A$ ist 14.

$\underbrace{P}_{\pm 1} \cdot A = L \cdot R$

$\det A = \underbrace{\det L}_{1} \det R$ falsch?

**f) [1 Punkt]** Die folgende Matrix ist gegeben,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Somit gilt $\mathrm{Kern}(A) = \{0\}$.

richtig

b) $A^T = -A$

$$\det(A^T) = \begin{cases} \det(A)^T = \det(A) \\ \det(-A) = (-1)^n \det(A) \end{cases} \Rightarrow 0$$

c) $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $P^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$P^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = P^3 = P^6 = P^{21} = P^{99}$